Curso de trigonometria

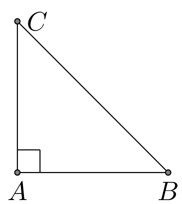
Télico Oliveira

20 de agosto de 2023

1 Aula 1 - Trigonometria no triângulo retângulo

1.1 O triângulo retângulo e os seus elementos

Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo reto e os outros dois ângulos agudos. Os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados de **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**. As razões trigonométricas são relações entre a medida de abertura de um ângulo agudo e a razão entre duas medidas dos lados do triângulo. Nesse capítulo, estudaremos três importantes razões trigonométricas no triângulo retângulo. O **seno, o cosseno e a tangente**.



1.2 Seno de um ângulo agudo

$$\operatorname{sen} x = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

1.3 Cosseno de um ângulo agudo

$$\cos x = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

1.4 Tangente de um ângulo agudo

$$tgx = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

1.5 As razões trigonométricas nos ângulos de 30, 45 e 60 graus

Os ângulos de 30, 45 e 60 graus são conhecidos como ângulos notáveis e dentre todos os valores possíveis para um ângulo agudo, estes três merecem uma atenção especial e se faz necessário demonstrar o cálculo do valor das suas razões trigonométricas. A tabela a seguir traz as razões trigonométricas desses arcos. Estes valores serão importantes ao longo de todo o curso.

x	30°	45°	60°
$senx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Demonstração

Razões trigonométricas nos ângulos de 30º e 60º

Considere o triângulo equilátero ABC. Como ABC é equilátero, também será equiângulo e cada um dos seus ângulos terá 60º de medida de abertura.

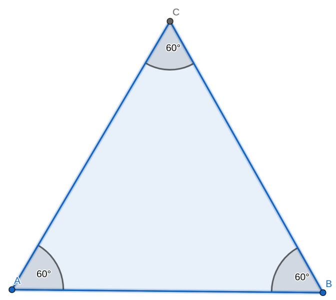


Figura 1: Triângulo equilátero ABC

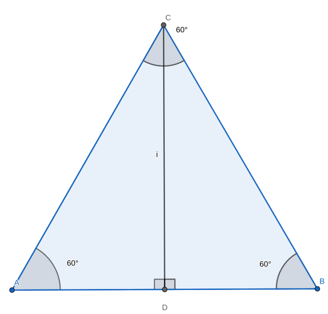
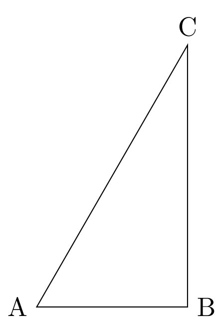


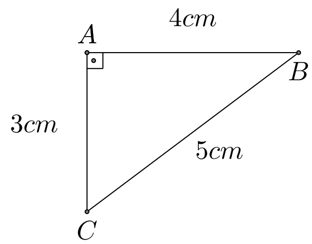
Figura 2: Triângulo equilátero ABC



1.6 A tabela de razões trigonométricas

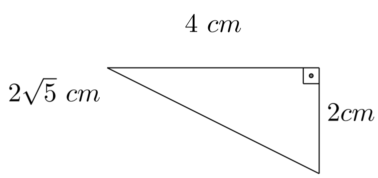
2 Exercícios

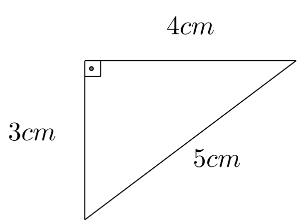
1. Observe o triângulo retângulo da figura e dê o valor de:



   (a) sen$B$
   (b) $\cos B$
   (c) $\tan B$

2. Dê o valor de senα em cada caso

   (a) 

   (b) 

3. Num triângulo ABC, reto em A, a medida da hipotenusa é de 25 cm e $\cos B = 0,96$. Calcule a medida do perímetro do triângulo.

4. Calcule o valor de x em cada caso.

   (a)
   (b)
   (c)

5. Num triângulo retângulo, um cateto mede 12 cm e o ângulo oposto é de 60°. Calcule a medida da hipotenusa e do outro cateto.

6. Quando o Sol está a 60°, qual é o comprimento da sombra de um poste de 7,5 cm de altura? Dê o resultado em metros aproximado com uma casa decimal.

7. Um avião levanta voo sob ângulo de 30°. Quando tiver percorrido meio quilômetro, a que altura estará do solo?

8. Num triângulo retângulo em A são dados $B = 37°$ e $AB = 5cm$. Calcule as medidas dos lados AC e BC.

9. Um triângulo isósceles tem perímetro de 32 cm e o cosseno de um dos seus ângulos congruentes é 0,6. Calcule a área desse triângulo.

10. Um retângulo tem dimensões 6 cm e 8 cm. Calcule o seno do menor ângulo formado por uma de suas diagonais com os lados.

11. Os lados de um triângulo retângulo em A medem $BC = x+4$, $AC = x-4$ e $AB = x-5$. Calcule as tangentes dos ângulos agudos desse triângulo.

12. Na figura temos: $AB = \sqrt{3}$, $BM = 1$ e $M\hat{A}N = 30$. Qual é o valor de y?

13. Com os dados indicados na figura e sabendo que $y - x = 4\sqrt{3}$, calcule o valor da soma x + y.

14. Na figura, supondo conhecidos α, β e d, calcule o valor de x.

15. Calcule o valor da hipotenusa do triângulo retângulo cujos ângulos agudos são x e y e os catetos têm medidas iguais a $\text{sen}x + \text{sen}y$ e $\cos x + \cos y$. (Você pode determinar os valores de x e de y).

16.

3 Aula 2 - Triângulos quaisquer

No capítulo anterior, aprendemos sobe as razões trigonométricas nos triângulos retângulos. Nesta oportunidade, mostraremos que é possível estender a ideia de razões trigonométricas para os outros triângulos. Lembrando que um triângulo pode ser:

- acutângulo: quando todos os seus ângulos são agudos,
- retângulo: quando um de seus ângulos é reto e os outros dois são agudos ou
- obtusângulo: quando um de seus dois ângulos é agudo e os demais são agudos.

3.1 Lei dos senos

3.1.1 1° caso: o triângulo é acutângulo

3.1.2 2° caso: o triângulo é obtusângulo

$$\text{sen}A = \text{sen}(180° - A)$$

Exercícios (Lei dos senos)

1. Calcule o valor de x em cada caso.

2. Num triângulo ABC, temos AC = 8 cm, BC = 6 cm e $\alpha = B\hat{A}C$, $\beta = A\hat{B}C$, se $\beta = 60°$, então qual é o valor de senα?

3. Num triângulo ABC, são dados $A = 40°$, $B = 35°$ e AB = 100 m. Calcule a medida do ângulo C e os lados AC e BC.

3.2 Lei dos cossenos

Provando a lei dos cossenos para o triângulo acutângulo

E no caso do triângulo retângulo?

Observações:

$$\cos 90^\circ = 0$$

Se A é um ângulo obtuso, então

$$\cos A = -\cos(180 - A)$$

Exercícios (Lei dos cossenos)

1. Calcule o valor de x em cada caso

2. Num triângulo ABC são dados $A = 45^\circ$, AB = 6 cm e AC = 8 cm. Calcule a medida do lado BC.

3. Dois lados de um triângulo medem 5 cm e 10 cm e formam um ângulo de $110°$. Calcule a medida do terceiro lado, sabendo que $\cos 70° = 0,34$.

4. Calcule o cosseno do ângulo oposto ao maior lado do triângulo cujos lados medem 2 cm, 3 cm e 4 cm.

5. (CESGRANRIO) O trapézio retângulo MNPQ tem as medidas indicadas na figura. O cosseno do ângulo $Q\hat{M}N$ vale:

(a) $\frac{-3}{5}$
(b) $\frac{-4}{5}$
(c) -1
(d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 Aula 3 - Trigonometria na circunferência

4.1 Medidas em graus

4.1.1 Calculando o ângulo dos ponteiros de um relógio

Exercícios

1. Quanto mede o menor ângulo entre os ponteiros às 12h 24 min?

2. Calcule o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio às 14 h.

3. Calcule o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio às 14 h 30 min.

4.1.2 Operações com ângulos em graus

Um arco de 1 grau possui 60 minutos ($1^{\circ} = 60^{'}$) e um arco de 1 minuto possui 60 segundos ($1^{'} = 60^{''}$)
. **Exercícios**

1. Quantos segundos possui um arco de 3º20'?

2. Quantos graus e minutos existem em um arco de 1236'?

3. Calcule a metade de 45°.

4. Qual é a oitava parte de 110°?

5. Calcule seis quintos de $220^{\underline{o}}$ 55'.

4.1.3 Comprimento de um arco

$$C = \frac{2\pi r}{\alpha},$$

em que α é a medida do ângulo interno do arco em graus. **Exemplos**

1. Calcule o comprimento de um arco de $120^{\underline{o}}$ em uma circunferência de raio 12 cm.
2. Uma pessoa, caminhando em volta de uma praça circular, ao percorrer 126 m descreve um arco de 160°. Qual e o diâmetro dessa praça?

4.2 Medidas em radianos

Um arco de 1 radiano (1 rad) é um arco de comprimento igual ao raio da circunferência que o contem.

Como o comprimento da circunferência é $c = 2\pi r$, a medida da circunferência em radianos é 2π.

Podemos estabelecer então uma relação entre o ângulo em graus e em radianos. **Exemplo** qual é o valor, em radianos dos ângulos de 180°, 90°, 45°, 60° e 30°?

Exercícios

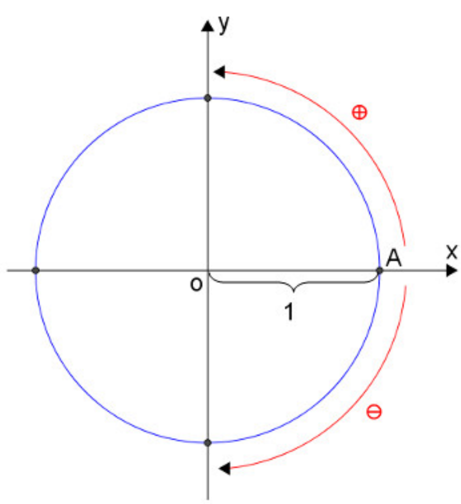
1. Converta em graus as seguintes medidas:
2. (a) $\frac{5\pi}{3} rad$

   (b) $\frac{3\pi}{8} rad$

(c) $\frac{\pi}{12} rad$

(d) $\frac{16\pi}{5} rad$

4.3 O ciclo trigonométrico



[scale=0.5]

Figura 3: Círculo trigonométrico - fonte: InfoEscola

Exercícios

1. Desenhe a circunferência trigonométrica e marque nela a imagem do número dado.

   (a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{5\pi}{6}$

(c) $\frac{7\pi}{6}$

(d) $-\frac{\pi}{4}$

4.3.1 Arcos côngruos

O conjunto dos números côngruos (ou congruentes) a x é $x + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}$ **Exercícios**

1. Marque no ciclo trigonométrico a imagem do número dado em cada caso.

   (a) 36π

   (b) 37π

(c) $\frac{83\pi}{4}$

2. Dê o quadrante onde se representa a extremidade de cada arco.

   (a) 1989°

   (b) 413°

   (c) 1351^{o}

5 Seno e cosseno no ciclo trigonométrico

Definição Dados um número real x, se a imagem de x no ciclo é o ponto de coordenadas (a, b), definimos:

- cosseno de x é a abcissa a;
- seno de x é a ordenada b.

$$\cos x = a$$
$$senx = b$$

5.1 Seno e cosseno de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$

Usando os resultados anteriores e propriedades de simetria em relação aos eixos coordenados, obtemos os senos e cossenos que indicamos a seguir.

5.2 Seno e cosseno de números côngruos

$$sen(x + 2k\pi) = senx$$

$$cos(x + 2k\pi) = cosx$$

Exercícios

1. Determine o valor de;

   (a) $sen 3\pi$

   (b) $\cos 3\pi$

   (c) $sen 6\pi$

(d) $cos 6\pi$

(e) $sen \frac{5\pi}{2}$

(f) $cos \frac{5\pi}{2}$

2. Calcule as expressões:

   (a) $cos2\pi + 3cos\pi - \frac{1}{2}sen\frac{\pi}{2}$

   (b) $sen(2\pi - \frac{5\pi}{6})$

   (c) $cos(2\pi + \frac{\pi}{3})$

(d) $sen 120° + sen 240° + sen 360°$

3. Determine os valores de x que satisfazem as equações:

   (a) $sen x = 1$

   (b) $sen x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $senx = -\frac{1}{2}$

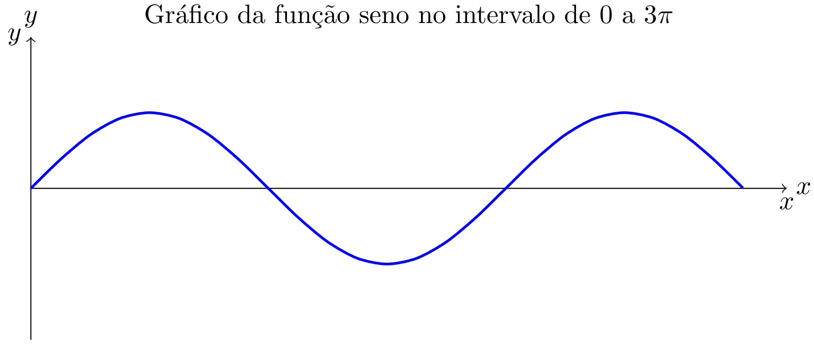
(d) $senx$

5.3 Função seno

Definição
Denominamos função seno à função que a cada número real x faz corresponder o número real $y = senx$.
Gráfico

x	$y = senx$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1

Gráfico da função seno no intervalo de 0 a 3π



Domínio
O domínio da função seno é o conjunto dos números reais.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Imagem
A imagem da função seno são os números reais contidos no intervalo fechado $[-1, 1]$.

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

Função periódica
Uma função $y = f(x)$ é periódica se existe um número real positivo p que satisfaz a igualdade $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. O menor valor de p que verifica essa condição é chamado de período da função.

Período da função seno O período da função seno é 2π. **Exercícios**

1. Estude a função dada. Isto é, construa o gráfico, indique o período, o seu domínio e imagem.
   (a) $y = senx + 2$
   (b) $y = senx - 1$
   (c) $y = 3senx$
2. Para quais valores de m existe $senx7m - 6$?

3. Se $y = 4senx + 3$, qual é o valor máximo e mínimo que y pode ter?

5.4 Função cosseno

Denominamos **função cosseno** à função que a cada número real x faz corresponder o número $y = \cos x$.
Gráfico

Gráfico

x	$y = senx$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0

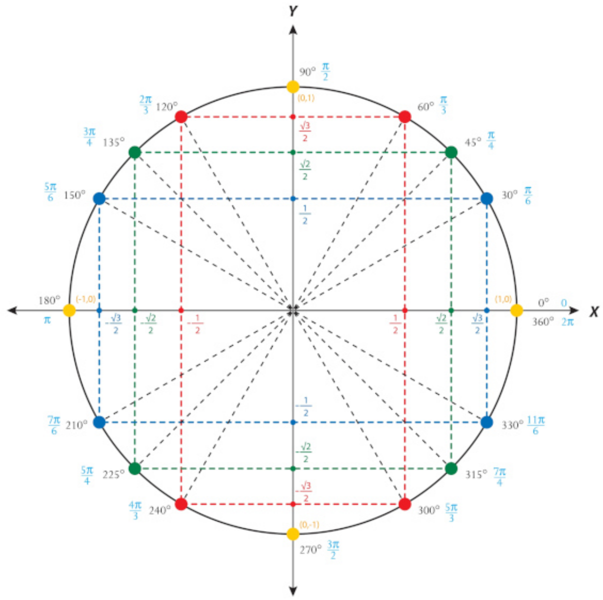
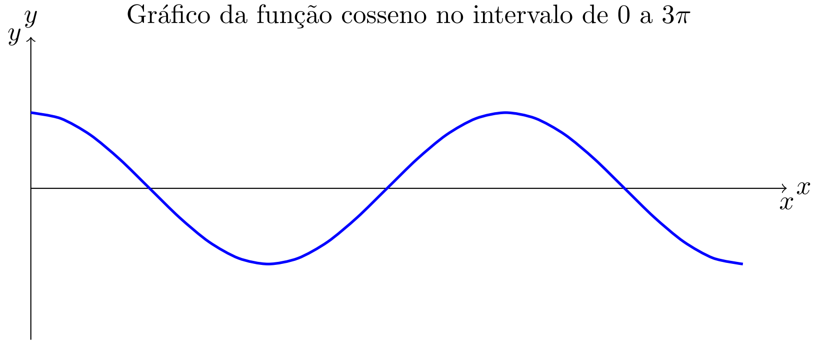
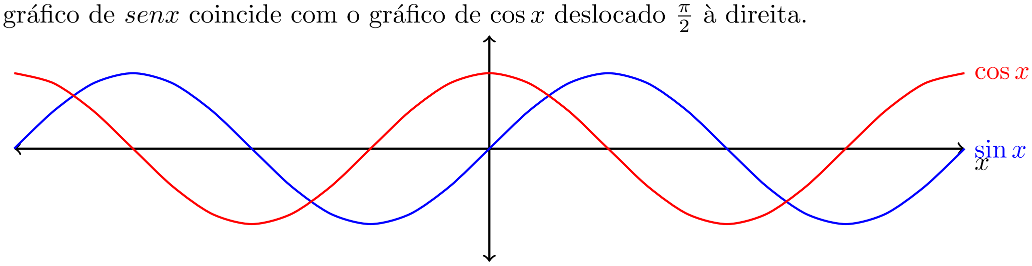


Figura 4: Círculo trigonométrico - fonte: InfoEscola

Gráfico da função cosseno no intervalo de 0 a 3π



O gráfico de $senx$ coincide com o gráfico de $\cos x$ deslocado $\frac{\pi}{2}$ à direita.



Função par e função ímpar

A função cosseno é uma função par, isto é, para um número real x qualquer, vale

$$\cos(-x) = \cos x$$

A função seno é uma função ímpar, ou seja, para um número real x, vale a relação

$$sen(-x) = -senx$$

Exercícios

1. Construa o gráfico das funções dadas:

   (a) $y = 2\cos x$

(b) $y = 2\cos x + 1$

2. Para que valores de m a equação $\cos x = m - m - 1$ admite solução?

5.4.1 A relação fundamental

$$senx + \cos x = 1$$

Exercícios

1. Dados $senx = \frac{-2}{3}$, quais são os possíveis valores de $\cos x$?

2. Dados $\cos x = \frac{-1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, calcule sen$x$.

3. Calcule k de modo que se tenha simultaneamente $sen\alpha = 1 + 4k$ e $\cos\alpha = 1 + 2k$.

4. Se $senx + \cos x = 1 + 3\alpha$ e $senx - \cos x = 1 - a$, qual é o valor de a?

5. Dado $senx \cdot \cos x = a$, calcule o valor de $y = (senx + \cos x)^2$ em função de a.

6. Uma roda de bicicleta que tem diâmetro 80 cm.Quando esta roda dá 400 voltas, qual é a distância

percorrida pela bicicleta?

7. Às 4h e x minutos, os ponteiros do relógio formam um ângulo de 180°. Determine o valor de x.

8. Determine os elementos do conjunto

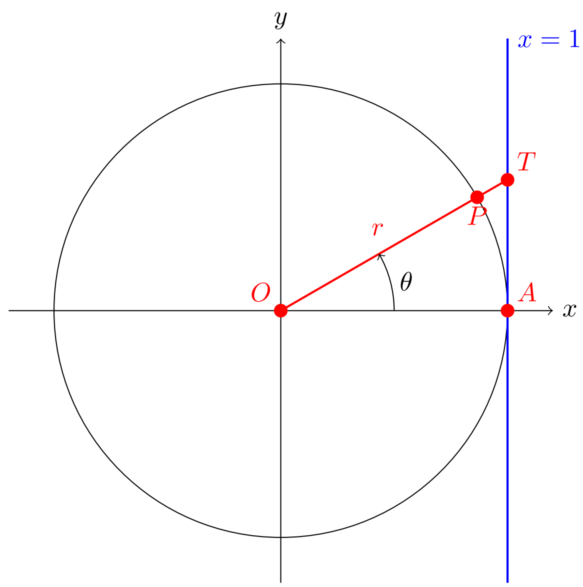
$$\{y \in \mathbb{R} \mid y = sen\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

5.5 A função tangente

5.5.1 A função tangente no ciclo trigonométrico

Dado um número real x com imagem no ponto P do ciclo, e tal que a reta $\overline{OP}$ intersecta o eixo t no ponto T, definimos:

$$\tan x = \overline{AT}$$



5.5.2 Condição de existência

$\tan x$ não existe se $x \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...\}$

5.5.3 Tangente de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$

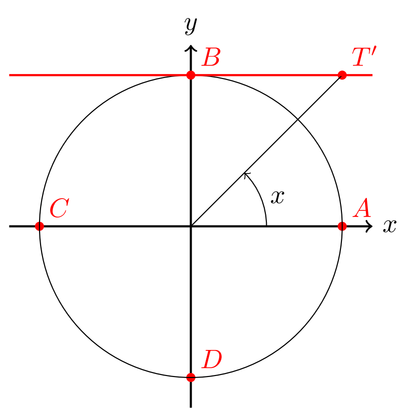
5.5.4 Função tangente

Exercícios

1.

5.6 A função cotangente

Definição



$$cotg x = \overline{BT'}$$

condição de existência
$cotgx$ existe se $x \neq kx$, $k \in \mathbb{Z}$
Exemplo:

1. Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos $P = B$ e $cotgx = 0$.
2. Para $x = \frac{3\pi}{2}$, temos $P = D$ e $cotgx = 0$
3. Qual é a condição de existência de $cotg(2x - \pi)$?

5.6.1 Relação entre tangente, cotangente, seno e cosseno

$$cotgx = \frac{cosx}{senx}$$
$$cotgx = \frac{1}{tgx}$$

Exemplos:

1. Calcule o valor de:
   (a) $cotg\frac{\pi}{6}$

   (b) $cotg\frac{\pi}{4}$

   (c) $cotg\frac{\pi}{3}$

   (d) $cotg\frac{\pi}{2}$

5.6.2 Função cotangente

$y = cotgx$ para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

- Domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

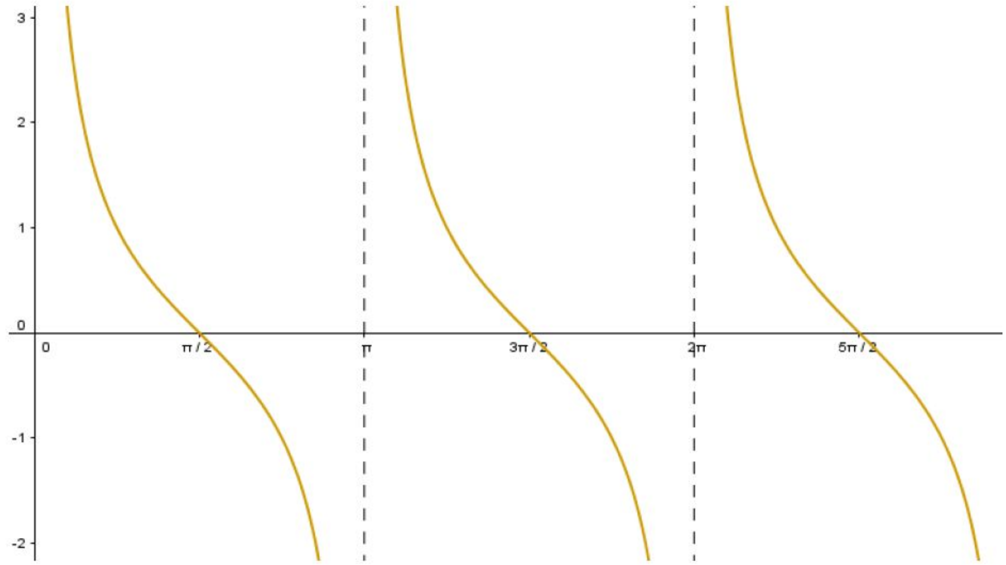


Figura 5: Gráfico da função cotangente de x

- Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}$
- Período: π

Exercícios

1. Dê o valor de:
   (a) $cotg150°$

   (b) $cotg225°$

2. Dados $senx = \frac{1}{2}$, quais são os possíveis valores de $cotgx$?
3. se $cotgx = \frac{1}{2}$, então qual é o valor de tgx?
4. Dê a condição de existência de $cotg8x$.

5.7 Funções secante e cossecante

Definições

Condições de existência

Exemplo

5.7.1 Funções secante e cossecante

Função secante

Função cossecante

Exercício

5.8 As 5 relações primcipais

1. $sen^2x + \cos^2 x = 1$
2. $tgx = \frac{senx}{cosx}$ $\forall x \leq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
3. $cotgx = \frac{cosx}{senx}$ $\forall x \leq k\pi$
4. $secx = \frac{1}{cosx}$ $\forall x \leq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
5. $cossecx = \frac{1}{senx}$ $\forall x \leq k\pi$

5.9 Relações decorrentes das relações principais

1. $cotgx = \frac{1}{tgx}$
2. $sec^2x = 1 + tg^2x$
3. $cossec^2x = 1 + cotg^2x$

5.10 Exercícios

1. Simplifique as seguintes expressões.

    (a) $y = \frac{sossecx - senx}{secx - cosx}$

    (b) $y = \frac{cos^2x - cotgx}{sen^2x - tgx}$

(c) $y = \frac{(tga+cotga)^2}{sec^2a \cdot cossec^2a}$

(d) $y = \frac{cotg^2a}{1+cotg^2a} - \frac{1}{1+tg^2a}$

2. Prove que

(a) $(senx + cosx)(senx - cosx) = 2sen^2x - 1$

(b) $(secx + tgx)(secx - tgx) = 1$

(c) $tgx \cdot cossecx + cotgx \cdot secx = secx + cossecx$

(d) $\frac{senx}{1+cosx} + \frac{1+cosx}{senx} = 2cossecx$

(e) $cos^2x = (1 - senx)(1 + senx)$

(f) $(cossecx - cotgx)^2 = \frac{1-cosx}{1+cosx}$

(g) $tg^2x + sen^2x = sec^2x - cos^2x$

(h) $sen^6x = 1 - 3cos^2x + 3cos^4x - cos^6x$