Os números naturais e os sistemas de numeração

20 de agosto de 2023

Divisibilidade

1 Múltiplos de um número natural

Os múltiplos de um número natural são os números obtidos ao multiplicarmos esse número por outros números naturais.

Por exemplo, os múltiplos de 3 são 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 e assim por diante.

Para encontrar os múltiplos de um número, basta multiplicá-lo por 1, 2, 3, 4 e assim por diante. Por exemplo, os múltiplos de 5 são 5, 10, 15, 20, 25, 30 e assim por diante.

Os múltiplos também podem ser expressos como uma sequência infinita de números, como por exemplo:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

Ou seja, a sequência infinita de múltiplos de 5 é formada por todos os números que são divisíveis por 5.

Alguns exemplos de múltiplos comuns são:

- Os múltiplos de 2 são 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 e assim por diante.
- Os múltiplos de 3 são 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 e assim por diante.
- Os múltiplos de 4 são 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 e assim por diante.

2 Divisores de um número natural

Os divisores de um número natural são os números que dividem esse número de forma exata, sem deixar resto. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Para encontrar os divisores de um número, basta dividi-lo por todos os números naturais menores do que ele até o número 1. Por exemplo, para encontrar os divisores de 15, podemos dividi-lo por todos os números naturais menores do que 15 até o número 1:

- 15 é divisível por 1 e por 15, pois $15 : 1 = 15$ e $15 : 15 = 1$.
- 15 é divisível por 3, pois $15 : 3 = 5$.
- 15 não é divisível por 2, pois $15 : 2$ deixa como quociente 7 e resto 1. Assim, os divisores de 15 são 1, 3 e 15.

Exemplos

- Os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6.

- Os divisores de 8 são 1, 2, 4 e 8.
- Os divisores de 9 são 1 e 9.
- Os divisores de 10 são 1, 2 e 5.

Observações

- O conjunto de múltiplos de um número natural é infinito.
- O conjunto de divisores de um número natural diferente de zero é finito.
- O zero é o menor múltiplo de todo número natural.
- O 1 é o menor divisor de um número natural.

2.1 Exercícios

1. Escreva:
   (a) Os dez primeiros múltiplos de 8.
   (b) Os múltiplos de 5 que estão entre 9 e 37.
2. Dados os números abaixo, responda.
   72, 125, 24, 124, 31
   (a) Qual é divisível por 3?
   (b) Qual é divisível por 5?
   (c) Qual é primo? Justifique.
   (d) Quais são os divisores de 24?
3. Qual é o maior número de três algarismos divisível por 2?
4. Quais são os três maiores divisores de 32?
5. Quais são os fatores de 96 compreendidos entre 10 e 25?
6. Escreva o conjunto dos divisores naturais de de 8,9,10,12,15 e 20.

3 Números primos

Número primo é todo número natural maior ou igual a 2 que tem exatamente dois divisores diferentes, o 1 e ele mesmo.

São exemplos de números primos os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc.

É possível demonstrar que a sequência de números primos é infinita.
O número 1, por definição não é considerado um número primo pois só possui um único divisor.

Estes números possuem um papel fundamental na aritmética de acordo com o resultado que se segue:

todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito como um produto de números primos.

O enunciado do parágrafo anterior é o **Teorema Fundamental da Aritmética**.Através dele, qualquer número inteiro pode ser decomposto em uma série de números primos, que são os seus fatores primos.

Por exemplo, o número 15 pode ser escrito como um produto de números primos da seguinte forma: $15 = 3 \cdot 5$. O número 60 também pode ser escrito como um produto de números primos: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

O teorema fundamental da aritmética é importante porque nos permite decompor qualquer número inteiro em seus fatores primos, o que pode ser útil em muitas situações, como quando queremos verificar se um número é primo ou não.

Todo número natural maior do que 1 que não é primo é chamado de **número composto**.

3.1 Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes foi um importante matemático, astrônomo e geógrafo que viveu no Século III antes de Cristo.
Ele nasceu na cidade de Cirene, onde hoje é situada a Líbia mas viveu em Alexandria. Dentre os seus trabalhos mais notáveis estão o **cálculo do raio da circunferência da Terra** e o **Crivo de Eratóstenes**.

Figura 1: Eratóstenes. Fonte: Wikipedia

O crivo de Eratóstenes é um método que foi desenvolvido por Eratóstenes para encontrar todos os números primos até um determinado valor. Ele é chamado de "crivo"porque é baseado no processo de "peneirar"os números para deixar apenas os primos.

Para usar o crivo de Eratóstenes, basta seguir o passo-a-passo que será visto adiante. Utilizaremos como exemplo os números primos menores do que 50.

1. Escreva todos os números inteiros de 2 até o valor desejado em uma tabela ou em uma lista.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

2. Comece pelo número 2 e marque todos os números que são múltiplos dele como não primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

3. Passe para o próximo número que ainda não foi marcado, no caso, o número 3, e repita o processo,

marcando todos os múltiplos dele como não primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

4. Repita esse processo até que todos os números até o valor desejado tenham sido examinados. Os números que restarem serão os primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

5. Após a conclusão do crivo, temos que os números primos menores do que 50 são: 2,3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 17, 41, 43 e 47.

4 Decomposição em fatores primos

É importante discutirmos agora sobre o algoritmo de decomposição de um número composto em fatores primos.

4.1 Exercícios

1. Decomponha os seguintes números em fatores primos.
   (a) 88
   (b) 225
   (c) 48
   (d) 124

2. Marque V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas.
   ( ) O 2 é o único primo par.
   ( ) O 1 é múltiplo de todos os números.
   ( ) O número 8 é divisor de 60.
   ( ) O número 45 é múltiplo de 9.
   ( ) Todo número par é múltiplo de 2.
   ( ) Todo número ímpar é múltiplo de 3.

3. Escreva todos os números primos menores do que 30.

4. Cássio lembra da senha de seu cartão de crédito como o produto do maior número primo de dois algarismos pelo menor número primo de três algarismos. Qual é a senha do cartão de crédito de Cássio?

5. Analise os números abaixo e pinte apenas aqueles que são primos.
   43 25 28 7 40 2 36 11 23 16 19 8 50 1 29 6 31

5 Mínimo Múltiplo Comum

5.1 Algoritmo do MMC

6 Máximo Divisor Comum

6.1 Algoritmo do MDC

6.2 Exercícios

1. Determine o mdc de 18 e 60.
2. Determine o mdc de:
   (a) 9 e 12.
   (b) 8 e 20.
   (c) 10, 15.
   (d) 10 e 20.
3. Determine o MMC pelo processo da decomposição:
   (a) mmc(15,18)
   (b) mmc(10, 12)
   (c) mmc (10, 6, 15)
   (d) mmc(12, 20, 3)
   (e) mmc(15,3)

7 Critérios de divisibilidade

Nesta oportunidade, vamos estudar os critérios de divisibilidade. Até este momento, sempre que queremos saber se um número natural é divisível por outro ou não, precisamos fazer a divisão e observarmos o resto.
Conhecer os critérios de divisibilidade facilitará o nosso trabalho sempre que precisarmos saber se um número natural é ou não divisível por outro.

O que são critérios de divisibilidade? Critérios de divisibilidade são regras práticas que nos permitem verificar se um número natural dado é ou não divisível por outro número natural sem a necessidade de realizar o algoritmo da divisão.

Exemplo: Utilize o algoritmo da divisão para mostrar que 108 não é múltiplo de 5.

7.1 Divisibilidade por 2

Um número natural é divisível por 2 se ele é par. Ou seja, se o algarismo da unidades é par.

Exemplo: Como é o resto da divisão de um número natural ímpar por 2?

7.2 Divisibilidade por 3

Um número natural é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Exemplo: Sem realizar a divisão, verifique se os seguintes números são divisíveis por 3.

1. 54702
2. 624
3. 12123
4. 45
5. 320

7.3 Divisibilidade por 4

Decompondo um número natural, é possível verificar quando ele é divisível por 4. Observe os seguintes exemplos:

1. 49312 = 40000 + 9000 + 300 + 10 + 2
   40000, 9000 e 300 são divisíveis por 4.
   10 + 2 = 12 é divisível por 4.
   Portanto, 49312 é divisível por 4.
2. 5305 = 5000 + 300+ 5
   05 não é divisível por 4. Portanto, 5305 não é divisível por 4.

um número natural é divisível por 4 se os seus dois últimos algarismos formarem um número divisível por 4.

Exemplo: Verifique se os seguintes números são divisíveis por 4.

1. 984

2. 37515

7.4 Divisibilidade por 5

Observe a sequência dos múltiplos naturais de 5:

$$M(5) = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...$$

Um número natural é divisível por 5 se o último algarismo for um 0 ou 5.

7.5 Divisibilidade por 6

Observação:$6 = 2 \cdot 3$

Um número é divisível por 6 se for divisível tanto por 2 quanto por 3.

Exemplo: Verifique se os seguintes números são divisíveis por 6.

1. 246

2. 343

3. 49312

7.6 Divisibilidade por 9

Um número natural é divisível por 9 se a soma de seus algarismos for divisível por 9.

Exemplo: Verifique se os seguintes números naturais são divisíveis por 9.

1. 7425

2. 37512

3. 984

4. 1080

5. 901

7.7 Divisibilidade por 10, 100 e 1000

Observe a sequência de múltiplos de 10:

$$M(10) = 0, 10, 20, 30, 40, 50, ...$$

Todos os múltiplos de 10 apresentam o 0 no algarismo das unidades e este padrão serve como critério de divisibilidade por 10. O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos múltiplos de 100 e 1000.

Um número natural é divisível por 10 (ou por 100 ou por 1000) quando o seu último algarismo é zero (ou quando os seus últimos algarismos são 00 ou 000, respectivamente).

7.7.1 Divisão por 10

Se um número natural é divisível por 10, o resultado da sua divisão por 10 terá os mesmos algarismos deste número exceto o zero nas unidades.
Veja alguns exemplos:

$$540 \div 10 = 54$$

$$8000 \div 10 = 800$$

$$93500 \div 10 = 9350$$