

Explorando a fórmula do radical duplo

Télico Oliveira

Introdução

O objetivo deste material é discutir a resolução de questões que envolvem o radical duplo, isto é, expressões do tipo

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

em que A e B são números reais maiores do que zero.

A fórmula

Para chegarmos a uma fórmula simplificada para o radical duplo, vamos considerar dois números reais maiores do que zero x e y de forma que

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Elevando ambos os termos ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}(\sqrt{A + \sqrt{B}})^2 &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\ A + \sqrt{B} &= x + 2\sqrt{xy} + y \\ A + \sqrt{B} &= x + y + \sqrt{4xy}\end{aligned}$$

Assim, podemos considerar

$$\begin{aligned}A &= x + y \\ B = 4xy &\Rightarrow xy = \frac{B}{4}\end{aligned}$$

Considerando a soma e o produto de x e y, podemos escrever uma equação do segundo grau em função de A e B, a partir da fórmula da soma e do produto das raízes de uma equação do segundo grau.

$$z^2 - S z + P = 0$$

em que $S = x + y$ e $P = xy$. Assim, temos

$$\begin{aligned}S &= A \\ P &= \frac{B}{4}\end{aligned}$$

e podemos reescrever a equação como

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0$$

Resolvendo a equação em z, temos

$$z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Fazendo $\sqrt{A^2 - B} = C$, vem

$$z = \frac{A \pm C}{2}$$

Assim, temos que

$$x = \frac{A+C}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{A-C}{2}$$

Assim, concluímos que a fórmula do radical duplo tem como resultado

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Exercícios

1. $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$

$$C = \sqrt{7^2 - 13}$$

$$C = \sqrt{49 - 13}$$

$$C = \sqrt{36}$$

$$C = 6$$

$$\sqrt{7 + \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

2. $\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}$

$$\sqrt{11 - \sqrt{16 \cdot 6}}$$

$$\sqrt{11 - \sqrt{96}}$$

$$C = \sqrt{11^2 - 96}$$

$$C = \sqrt{121 - 96}$$

$$C = \sqrt{25}$$

$$C = 5$$

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{11+5}{2}} + \sqrt{\frac{11-5}{2}}$$

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{16}{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{8} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$$